Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ **und lineare Gleichungssysteme**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1)

a) Bestimmen Sie für die folgenden Geraden je eine Gleichung.

(i) $(1,3)+\mathbb{R}\cdot(2,-1)$, (ii) $(4,1)+\mathbb{R}\cdot(1,-1)$, (iii) $(0,1)+\mathbb{R}\cdot(1,0)$.

b) Bestimmen Sie je eine Parameterdarstellung für die folgenden Geraden.

(i) $x+y=3$, (ii) $3x-4y=-4$, (iii) $2x+y=5$.

Aufgabe 2 (1) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch Punkte a und b.

a) $a=(2,1)$, $b=(4,-1)$, b) $a=(3,-2)$, $b=(-2,1)$.

Aufgabe 3 (2)

a) Es seien a, b, c drei Punkte in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: a, b, c liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\det(c-a, b-a)=0$ ist.

b) Prüfen Sie, ob $(3,2)$, $(6,-1)$ und $(2,3)$ auf einer Geraden liegen.

c) Die Punkte $(p,3)$, $(8,1)$, $(3,5)$ leigen auf einer Geraden. Bestimmen Sie p.

Aufgabe 4 (2) Die Gerade ℓ sei gegeben durch die Gleichung $5x-12y=-3$. Berechnen Sie den Abstand von P zu ℓ in den nachfolgenden Fällen:

a) $P=(1,0)$, c) $P=(0,0)$, e) $P=(3,2)$,

b) $P=(0,1)$, d) $P=(4,-1)$, f) $P=(19,9)$.

Aufgabe 5 (2) Die Gerade ℓ habe den Stützvektor $(1,3)$ und Richtungsvektor $(-2,1)$. Berechnen Sie den Abstand von P zu ℓ für die folgenden Punkte:

a) $P=(1,0)$, c) $P=(0,0)$, e) $P=(1,3)$,

b) $P=(0,1)$, d) $P=(-1,2)$, f) $P=(19,9)$.

Aufgabe 6 (2) Es sei ℓ die Gerade mit der Gleichung $3x+y=4$. Bestimmen Sie alle Punkte der Ebene, welche einen Abstand $\sqrt{10}$ zu ℓ haben.

Aufgabe 7 (2) Gegeben sei eine Gerade m durch die Gleichung $3x-y=6$ und die Gerade $\ell=(-2,3)+\mathbb{R}\cdot(2,1)$. Bestimmen Sie die Punkte von ℓ, welche Abstand $\sqrt{10}$ zu m haben.

Aufgabe 8 (2) Gegeben sind die Punkte $P=(4,-2)$ und $Q=(3,1)$. Bestimmen Sie die Punkte R, für die gilt: $\angle RPQ=30°$ und die Fläche des Dreiecks PQR ist gleich 10.

Aufgabe 9 (2) Der Punkt $(a,1)$ habe zu der Geraden ℓ mit der Gleichung $3x-4y=1$ den Abstand 5. Berechnen Sie a.

Aufgabe 10 (3) Es seien $a,b\in\mathbb{R}^3$, beide ungleich 0. Beweisen Sie, dass $p=\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|^2}\cdot a$ der Lotfußpunkt von b auf a ist, d.h. der Punkt auf $\mathbb{R}\cdot a$ mit minimalem Abstand zu b. (*Hinweis:* Es wird ein $t\in\mathbb{R}$ gesucht, sodass $\|ta-b\|^2$ am kleinsten wird.)

Aufgabe 11 (1) Bestimmen Sie für die Vektoren a und b den Lotfußpunkt $L_a(b)$ von b auf $\mathbb{R}\cdot a$, d.h. den Punkt auf $\mathbb{R}\cdot a$ mit minimalem Abstand zu b.

a) $a=(1,1,1)$, $b=(4,2,3)$,

b) $a=(-1,2,-1)$, $b=(2,1,2)$,

c) $a=(2,3,1)$, $b=(0,1,1)$,

d) $a=(1,0,0)$, $b=(1,2,3)$,

e) $a=(0,1,1)$, $b=(1,2,4)$,

f) $a=(-1,1,2)$, $b=(2,3,-1)$.

Aufgabe 12 (2) Bestimmen Sie für die folgenden Ebenen jeweils eine Gleichung.

a) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Aufgabe 13 (3) Es sei $\ell=b+\mathbb{R}\cdot a$ eine Gerade in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Es gilt $x\in\ell$ genau dann, wenn $a\times x=a\times b$.

Aufgabe 14 (2) Finden Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax=b$, wobei

a) $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&1\\3&2&-3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}5\\-2\\-3\end{pmatrix}$,

b) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$,

c) $A=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&4&-2\\1&2&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-7\\-7\\1\end{pmatrix}$,

d) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}4\\8\\3\end{pmatrix}$.

Aufgabe 15 (1) Parallele Ebenen.

a) Es seien im $\mathbb{R}^3$ drei Ebenen gegeben:

$$E_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,2x-3y+z=1\right\}\text{ sowie}$$

$$E_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\text{ und }E_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Warum sind E_1, E_2 und E_3 parallele Ebenen? Sind welche davon gleich?

b) Es seien im $\mathbb{R}^3$ die Ebene E_1 durch die Punkte $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ sowie die Ebene $E_2=\{(x,y,z)\mid 3x+y+2z+2=0\}$ gegeben. Sind diese Ebenen parallel? Bestimmen Sie den Durchschnitt $E_1\cap E_2$.

Aufgabe 16 (2) Es seien in $\mathbb{R}^3$ drei Geraden gegeben:

$$G_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad G_2=\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix},\quad G_3=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}.$$

Welche Paare dieser Geraden sind parallel, windschief, schneiden sich? (Zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$, die sich nicht schneiden, aber auch nicht parallel sind, heißen windschief.) Begründen Sie und geben Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an!

Aufgabe 17 (2) Bestimmen Sie die Schnittmenge der Ebene E und der Gerade ℓ.

a) $E: x_1+x_2+x_3=1$, $\ell=(1,2,3)+\mathbb{R}\cdot(1,2,3)$,

b) $E: x_1+x_2+2x_3=4$, $\ell=(10,11,12)+\mathbb{R}\cdot(1,1,-1)$,

c) $E: 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2$, $\ell = (-1,4,-2) + \mathbb{R}\cdot(2,-1,1)$,

d) $E: x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$, $\ell = (2,1,2) + \mathbb{R}\cdot(1,1,1)$.

Aufgabe 18 (2) Bestimmen Sie die Schnittmenge der Ebenen E und F.

a) $E: x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $F: x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$,

b) $E: 2x_1 + x_2 - x_3 = 2$, $F: x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$,

c) $E: x_1 + x_2 - x_3 = 2$, $F: 3x_1 + x_2 - x_3 = 1$,

d) $E: 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6$, $F: x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$.

Aufgabe 19 (1) Berechnen Sie die folgenden Abstände:

a) vom Punkt $(2,-1,4)$ zur Geraden $\mathbb{R}\cdot(1,1,1)$;

b) vom Punkt $(1,1,1)$ zur Ebene $x + 2y - 2z = 4$;

c) zwischen den Geraden $(1,0,1) + \mathbb{R}\cdot(-1,2,0)$ und $(0,1,4) + \mathbb{R}\cdot(3,-2,2)$.

Aufgabe 20 (2) Es seien die Vektoren $u = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Finden Sie den Punkt $p \in \mathbb{R}\cdot w$ mit minimalem Abstand zu v. Finden Sie den Punkt v', der durch Spiegelung von v and der Geraden $\mathbb{R}\cdot w$ entsteht. Machen Sie hierzu eine Skizze!

Aufgabe 21 (2) Für eine Basis (a,b) von $\mathbb{R}^2$ nennt man die lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $A(xa + yb) = xa$ die Parallelprojektion auf $\mathbb{R}a$ entlang b.

a) Bestimmen Sie die Matrix der Parallelprojektion auf $\mathbb{R}(1,0)$ entlang $(0,1)$ sowie die Matrix der Parallelprojektion auf $\mathbb{R}(0,1)$ entlang $(1,0)$.

b) Bestimmen Sie die Matrix der Parallelprojektion A auf $\mathbb{R}(1,1)$ entlang $(-1,1)$. Finden Sie dafür zuerst die Koordinaten der Vektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ bezüglich der Basis $\big((1,1),(-1,1)\big)$.

Aufgabe 22 (2) Drehungen und Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$.

a) Geben Sie die Matrix der Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $y = 2x$.

b) Entscheiden Sie, ob die Matrix $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ eine Drehung oder eine Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ beschreibt. Bestimmen Sie den Drehwinkel bzw. die Spiegelungsgerade.

Aufgabe 23 (2) Drehungen und Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Matrizen entsprechen einer Drehung bzw. einer Spiegelung des $\mathbb{R}^2$? Geben Sie bei der Drehung den Drehwinkel und bei der Spiegelung die Spiegelungsgerade an.

$$\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24 (2) Spiegelungen von $\mathbb{R}^2$.

a) Es sei A die Spiegelung an der Geraden G mit der Gleichung $3x = 2y$.

(i) Finden Sie einen Richtungsvektor u der Geraden G mit $\|u\| = 1$, sowie einen weiteren Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $u \perp v$ und $\|v\| = 1$.

(ii) Offenbar ist $\mathcal{B} = (u, v)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist. Machen Sie eine Skizze dazu!

(iii) Bestimmen Sie die Matrix $A = {}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{E}$ ist die Standardbasis).

b) Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung an der Geraden $x = 2y$.

c) Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ beschreibt eine Spiegelung. Finden Sie die Spiegelungsgerade.

Aufgabe 25 (2) Es seien die Vektoren $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}_3$, so dass

b_1 parallel zu v ist,

b_2 in der Ebene durch den Ursprung und Punkte v, w liegt,

(b_1, b_2, b_3) negativ orientiert wird!

Wieviele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

b) Es sei $E = \mathbb{R} \cdot u + \mathbb{R} \cdot w$ und A die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene E. Es sei ferner $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ mit $c_2 = u$ und $c_3 = \frac{w}{\|w\|}$. Berechnen Sie die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}}$ und $A = {}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{E}$ ist die Standardbasis).

Finden Sie nun den Punkt v', der durch Spiegelung von v and der Ebene E entsteht.

Aufgabe 26 (2) Es sei die Matrix A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Matrix A orthogonal ist.

b) Es sei $v = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $A(v)$. Ergänzen Sie $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ und berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$.

c) Argumentieren Sie, warum A eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel φ.

Aufgabe 27 (2) Es sei die Matrix A gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Beweisen Sie, dass die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Matrix A orthogonal ist.

b) Es sei $v = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}-2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $A(v)$. Argumentieren Sie, warum A eine Drehspiegelung ist. Ergänzen Sie $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ und berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$.

c) Argumentieren Sie, warum A sogar eine Spiegelung ist. Geben Sie eine Gleichung der Spiegelungsebene an.

Aufgabe 28 (3) Es sei eine Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\|A(v) - A(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ und zusätzlich $A(0) = 0$. Zeigen Sie:

$$\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 29 (2) Zeigen Sie, dass A_1 und A_2 Drehungen sind, und bestimmen Sie die Drehwinkel (bzw. die Cosinus der Drehwinkel) und die Drehachsen.

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2-\sqrt{6} & 1+2\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 4 & 2-\sqrt{6} \\ 1-2\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 30 (2) Die lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

ist orthogonal. Bestimmen Sie α und β.

Aufgabe 31 (2) Es sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung um die y-Achse $\mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ um π. Bestimmen Sie die Matrix von A (bzgl. der Standardbasis).

Aufgabe 32 (3) Drehungen und Spiegelungen von $\mathbb{R}^3$.

a) Geben Sie die Matrix (bezüglich der Standardbasis) der Spiegelung an der Ebene $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ an.

b) Geben Sie die Matrix der Spiegelung an der Ebene $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ an.

c) Geben Sie die Matrix der Drehung mit Achse $\mathbb{R} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und Drehwinkel $\frac{\pi}{3}$ an.

d) Geben Sie die Matrix der Drehung mit Achse $\mathbb{R} \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ an.

Aufgabe 33 (3) Es sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ stets $\gamma_{\mathcal{B}}(v) = \left(\begin{smallmatrix} \langle v,b_1\rangle \\ \langle v,b_2\rangle \\ \langle v,b_3\rangle \end{smallmatrix}\right)$ gilt.
Zur Erinnerung: $\gamma_{\mathcal{B}}(v)$ bezeichnet die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Es gilt

$$\gamma_{\mathcal{B}}(v) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow v = xb_1 + yb_2 + zb_3.$$